Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zufallsversuch

Bei einem Zufallsversuch tritt genau eines von mehreren möglichen Ergebnissen ein. Welches Ergebnis eintritt, ist nicht vorhersehbar.

Mögliche Ergebnisse bei einem Wurf eines Würfels sind: 1; 2; 3; 4; 5; 6

Ereignis

Alle Ergebnisse eines Zufallsversuch, welche eine bestimmte Eigenschaft besitzen, bilden ein **Ereignis**. Diese Ergebnisse heißen dann für das Ereignis günstige Ergebnisse.

Das Ereignis „eine gerade Zahl würfeln“ bildet sich aus den Ergebnissen 2; 4 und 6

Spezielle Ereignisse

Ein **unmögliches Ereignis** ist ein Ereignis, welches bei keinem Versuch auftreten kann.

Würfeln einer Augenzahl größer als 6

Ein **sicheres Ereignis** ist ein Ereignis, welches bei jedem Versuch eintritt.

Eine Zahl von 1 bis 6 wird gewürfelt.

Laplace Versuche und Wahrscheinlichkeiten

<u>Laplace Versuche</u>
Bei Laplace Versuchen sind alle Ergebnisse die eintreten können gleich wahrscheinlich.

<u>Laplace Wahrscheinlichkeiten</u>
Hat ein Laplace Versuch n mögliche Ergebnisse, dann beträgt die Wahrscheinlichkeit für jeden Ergebniss $\frac{1}{n}$.
Für die Wahrscheinlichkeit P(E) eines Ereignisses gilt:

$$P(E) = \frac{Anzahl\ der\ für\ E\ günstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ aller\ möglichen\ Ergebnisse}$$

E: Die Augenzahl ist ungerade.

P(E) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ = 50%

Gegenereignis

Alle Ergebnisse, die für ein Ereignis E nicht günstig sind, bilden das **Gegenereignis $\overline{E}$**.
Für die Wahrscheinlichkeit gilt:
P($\overline{E}$) $= 1 - P(E)$

Das Gegenereignis von „eine 1 Würfeln“ ist „keine 1 Würfeln“.

P(keine 1) = 1 – P(1)
= 1 - $\frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

Gesetz der großen Zahlen

Ist ein Zufallsversuch kein Laplace Versuch, so können die Wahrscheinlichkeiten der möglichen Ergebnisse in der Regel nur geschätzt werden. Dazu führt man den Versuch möglichst oft durch. Die relative Häufigkeit, mit der ein Ergebnis eintritt, wird als Schätzwert für die Wahrscheinlichkeit dieses Ergebnisses genommen. Der Schätzwert wird umso zuverlässiger, je mehr Versuche durchgeführt werden.

Kurz: Wird eine sehr große Anzahl an Versuchen durchgeführt, lassen sich dann die Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse abzählen.

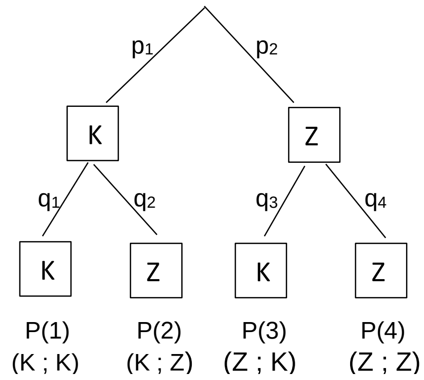
Mehrstufige Zufallsversuche

Werden mehrere nacheinander ablaufende Zufallsversuche zu einem einzigen Zufallsversuche zu einem einzigen Zufallsversuch zusammengefasst, so spricht man auch von einem **mehrstufigen Zufallsversuch.**

Baumdiagramm

Ein Baumdiagramm veranschaulicht die möglichen Ergebnsisse eines mehrstufigen Zufallsversuch und deren Wahrscheinlichkeit. Jedem Pfad im Baumdigramm entspricht genau ein Ergebnis. Ein Ereignis besteht aus einem oder mehreren Ergebnissen, die durch die entsprechenden Pfade dargestellt werden.

Eine Münze mit Kopf K und Zahl Z wird zweimal geworfen.



Produktregel (Pfadregel)

Die Produktregel gibt die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses an.
Die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses in einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist gleich dem Produkt der Wahrscheinlichkeiten entlang des zugehörigen Pfades im Baumdiagramm.

Beispiel: (oberes Baumdiagramm)
Eine Münze wird zweimal geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Ergebniss (K ; K)?
$P(1) = p_1 \cdot q_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 25\%$

Summenregel

Die Summenregel gibt die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses an.
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses in einem mehrstufigen Zufallsexperiment ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller zu diesem Ereignis gehörenden Pfade im Baumdiagramm.

Beispiel: (oberes Baumdiagramm)
Eine Münze wird zweimal geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, das sowohl Kopf als auch Zahl geworfen wird.

P(E) = P(2) + P(3) = $p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ = 50%

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Ist das Eintreten eines Ereignisses B bereits bekannt, so bezeichnet man die P(A|B) oder auch $P_B(A)$ die „durch B bedingte“ Wahrscheinlichkeit von A, d.h. die Wahrscheinlchkeit von A unter der Bedingung B.

Es ist $P_B(A) = \frac{P\,(A\ und\ B)}{P\,(B)}$

A: Die Augenzahl ist ungerade.
B: Die Augenzahl ist > als 4.

A

1	3	5
2	4	6

B

P(A) = $\frac{1}{2}$

P(B) = $\frac{1}{3}$

P(A und B) = $\frac{1}{6}$

$P_B(A) = \frac{1}{2}$

Vierfeldertafel

Vierfeldertafel eines Zufallsexperiment mit den Stufen A und B.

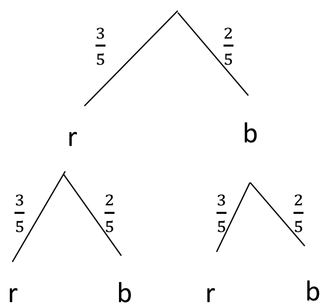
	B	$\overline{\mathbf{B}}$	**SUMME**
A	P (A und B)	P (A und $\overline{B}$)	P (A)
$\overline{\mathbf{A}}$	P ($\bar{A}$ und B)	P ($\bar{A}$ und $\overline{B}$)	P ($\bar{A}$)
SUMME	P (B)	P ($\bar{B}$)	1

Ziehen mit und ohne Zurücklegen

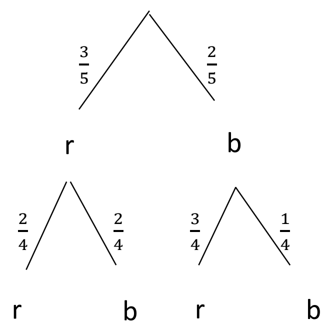
Beim Ziehen von Kugeln aus einem Behälter kann die gezogene Kugel behalten oder wieder zurückgelegt werden, bevor eine wietere Kugel gezogen wird.
Die möglichen Ergebnisse der beiden Ziehungsarten können sich unterscheiden; gleiche Ergebnisse müssen nicht die gleiche Wahrscheinlichkeit haben.

Beispiel: In einem Behälter sind 5 Kugeln. Es gibt 3 rote und 2 blaue Kugeln.

Mit zurücklegen



Ohne zurücklegen



Beim **Ziehen ohne Beachtung der Reihenfolge** berechnet man die Wahrscheinlichkeiten der geordneten Ergebnisse und addiert anschließend die Wahrscheinlichkeiten der entsprechend geordneten Paare.

P(eine rote und blaue Kugel ziehen) = P(b, r) + P(r, b)

Erwartungswert

Werden den Ergebnissen eines Zufallsversuchs Zahlenwerte oder Größen zugeordnet und diese mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten multipliziert, dann ist die Summe dieser Produkte der **Erwartungswert** der zugeordneten Zahlen oder Größen.

Beispiel:
Aus einem Behälter mit 3 roten und 2 blauen Kugeln wird eine Kugel gezogen. Bei einer Roten Kugel muss man 2€ bezahlen bei einer roten Kugel bekommt man 3€.
Erwartungswert: $\frac{3}{5} \cdot (-2€) + \frac{2}{5} \cdot 3€ = 0€$