

PROPORCIONALIDAD DIRECTA E INVERSA

Razón entre dos números

Siempre que hablemos de Razón entre dos números nos estaremos refiriendo al cociente (el resultado de dividirlos) entre ellos. Entonces:

Razón entre dos números **a** y **b** es el cociente entre ellos: $\frac{a}{b}$

Por ejemplo, la razón entre 10 y 2 es 5, ya que $\frac{10}{2}=5$

Proporción numérica

Los números **a**, **b**, **c** y **d** forman una **proporción** si la razón entre **a** y **b** es la misma que entre **c** y **d**. Es decir $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ Se lee "a es a b como c es a d"

Ejemplo: Los números 2, 5 y 8, 20 forman una proporción, ya que la razón entre 2 y 5 es la misma que la razón entre 8 y 20. Es decir $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$

En la proporción $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ hay cuatro términos; **a** y **d** se llaman **extremos**, **c** y **b** se llaman **medios**.

La propiedad fundamental de las proporciones es: **en toda proporción, el producto de los extremos es igual al de los medios, es decir:** $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Así, en la proporción anterior $\frac{2}{5}=\frac{8}{20}$ se cumple que el producto de los extremos nos da $2 \cdot 20 = 40$ y el producto de los medios nos da $5 \cdot 8 = 40$

Comprendido el concepto de proporción como una relación entre números o magnitudes, ahora veremos que esa relación puede darse en dos sentidos:

Las dos magnitudes pueden subir o bajar (aumentar o disminuir) o bien si una de las magnitudes sube la otra baja y viceversa.

Si ocurre, como en el primer caso, que las dos magnitudes que se comparan o relacionan pueden subir o bajar en igual cantidad, hablaremos de **Magnitudes directamente proporcionales**.

Si ocurre como en el segundo caso, en que si una magnitud sube la otra baja en la misma cantidad, hablaremos de **Magnitudes inversamente proporcionales**.

Magnitudes directamente proporcionales

Si dos magnitudes son tales que a **doble, triple...** cantidad de la primera corresponde **doble, triple...** cantidad de la segunda, o si a la mitad, tercio,... cantidad de la primera corresponde la mitad, tercio,... cantidad de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son **directamente proporcionales**.

Veamos un ejemplo de una tabla de valores directamente proporcionales, fijaros que al multiplicar una la otra magnitud también se multiplica, y si se divide una la otra también.



Magnitud 1	6	3	24
Magnitud 2	8	4	32

Observar que se verifica las siguientes igualdades: $\frac{6}{8} = \frac{3}{4} = \frac{12}{16} = 0,75$ a ese cociente, se le llama **razón de proporcionalidad directa**: $k = 0,75$

Ejemplo 1

En 50 litros de agua de mar hay 1.300 gramos de sal. ¿Cuántos litros de agua de mar contendrán 5.200 gramos de sal?

Como en doble cantidad de agua de mar habrá doble cantidad de sal; en triple, triple, etc. Las magnitudes **cantidad de agua** y **cantidad de sal** son **directamente proporcionales**.

Si representamos por x el número de litros que contendrá 5200 gramos de sal, y se escribe de la siguiente modo:

1300 litros ————— D ————— 50 gramos

5200 litros ————— x gramos

Se verifica la proporción: $\frac{1300}{50} = \frac{5200}{x}$ Y como **en toda proporción el producto de**

medios es igual al producto de extremos resulta: $1300 \cdot x = 50 \cdot 5200$, luego

$$x = \frac{50 \cdot 5200}{1300} = 200 \text{ gramos de sal}$$

Ejemplo 2

Un automóvil gasta 5 litros de gasolina cada 100 km. Si quedan en el depósito 6 litros, ¿cuántos kilómetros podrá recorrer el automóvil?

5 litros ^D 100 km

6 litros x km

Escribimos la proporción: $\frac{5}{6} = \frac{100}{x}$ y resolvemos

$$5 \cdot x = 6 \cdot 100$$

$$x = \frac{600}{5} = 120 \text{ km}$$

Luego, con 6 litros el automóvil recorrerá 120 km

Magnitudes inversamente proporcionales

Si dos magnitudes son tales que a **doble**, **triple**... cantidad de la primera corresponde la **mitad**, la **tercera parte**... de la segunda, entonces se dice que esas magnitudes son **inversamente proporcionales**.

Veamos un ejemplo de una tabla de valores inversamente proporcionales, fijaros que al multiplicar una la otra magnitud se divide y viceversa.

Magnitud 1	6	3	24
Magnitud 2	8	16	2

Observar que se verifica las siguientes igualdades: $6 \cdot 8 = 3 \cdot 16 = 24 \cdot 2 = 48$ a ese producto, se le llama razón de proporcionalidad inversa: $k = 48$

Ejemplo 1

Si 3 hombres necesitan 24 días para hacer un trabajo, ¿cuántos días emplearán 18 hombres para realizar el mismo trabajo?

En este caso a doble número de trabajadores, el trabajo durará la mitad; a triple número de trabajadores, el trabajo durará la tercera parte, etc. Por tanto, las **magnitudes son inversamente proporcionales**

Formamos la tabla:

Hombres	3	6	9	...	18
Días	24	12	8	...	?

Vemos que los productos $3 \cdot 24 = 6 \cdot 12 = 9 \cdot 8 = 72$

Por tanto $18 \cdot x = 72$, entonces $x = 4$

O sea que los 18 hombres tardarán 4 días en hacer el trabajo

Nótese que aquí la constante de proporcionalidad, que es 72, se obtiene multiplicando las magnitudes y que su producto será siempre igual.

Ejemplo 2

Un ganadero tiene forraje suficiente para alimentar 220 vacas durante 45 días.

¿Cuántos días podrá alimentar con la misma cantidad de forraje a 450 vacas?

Vemos que con el mismo forraje, si el número de vacas se duplica, tendrá para la mitad de días; a triple número de vacas, tercera parte de días, etc. Por tanto, son magnitudes **inversamente proporcionales**.

X = número de días para el que tendrán comida las 450 vacas

Nº de vacas	220	450
Nº de días	45	x

Se cumple que: $220 \cdot 45 = 450 \cdot x$, de donde $x = \frac{220 \cdot 45}{450} = 22$

Luego 450 vacas podrán comer 22 días.

En la práctica esto se suele disponer del siguiente modo:

	I	
220 vacas	_____	45 días
450 vacas	_____	x días

El truco es recordar que como es inversa escribimos la proporción invirtiendo solo una

de las fracciones:

$$\frac{450}{220} = \frac{45}{x} \text{ y de ahí se obtiene lo mismo: } 220 \cdot 45 = 450 \cdot x.$$

Ejemplo 3

Para envasar cierta cantidad de vino se necesitan 8 toneles de 200 litros de capacidad cada uno. Queremos envasar la misma cantidad de vino empleando 32 toneles. ¿Cuál deberá ser la capacidad de esos toneles?

$$\begin{array}{ccc} & \text{I} & \\ 8 \text{ toneles} & \text{-----} & 200 \text{ litros} \\ 32 \text{ toneles} & \text{-----} & x \text{ litros} \end{array}$$

Escribimos la proporción invirtiendo solo una de las fracciones:

$$\frac{32}{8} = \frac{200}{x}$$

$$32x = 8 \cdot 200$$

$$x = \frac{1600}{32} = 50 \text{ litros}$$

Debemos tener 32 toneles de 50 litros de capacidad para poder envasar la misma cantidad de vino.