

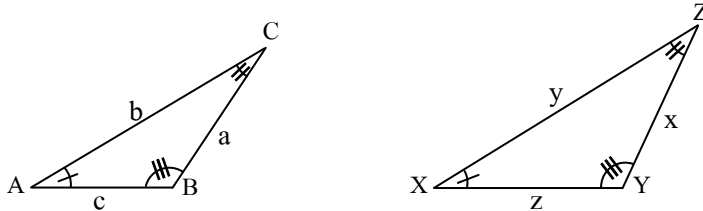
บทที่ 8 อัตราส่วนตรีโกณมิติ

1. รูปสามเหลี่ยมคล้าย

บทนิยาม

รูปสามเหลี่ยมใด ๆ ที่มีขนาดมุมเท่ากัน 3 มุม เรียกว่า รูปสามเหลี่ยมที่คล้ายกัน มีสมบัติดังนี้

1. สามเหลี่ยมสองรูปจะคล้ายกันก็ต่อเมื่อ สามเหลี่ยมคู่นั้นมีมุมเท่ากัน 3 คู่
2. ถ้าสามเหลี่ยมสองรูปคล้ายกันแล้ว อัตราส่วนของด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมที่เท่ากันย่อมเท่ากัน



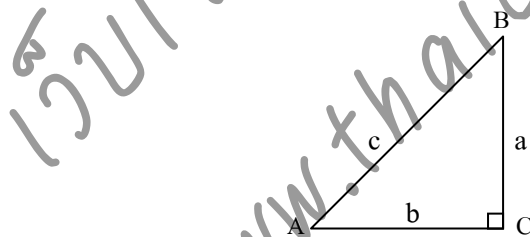
จากรูป $\triangle ABC \sim \triangle XYZ$ ดังนั้น $\frac{AB}{XY} = \frac{BC}{YZ} = \frac{CA}{ZX}$ นั่นคือ $\frac{c}{z} = \frac{a}{x} = \frac{b}{y}$

จาก $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ จะได้ว่า $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$: จาก $\frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ จะได้ว่า $\frac{b}{c} = \frac{y}{z}$

และจาก $\frac{a}{x} = \frac{c}{z}$ จะได้ว่า $\frac{a}{c} = \frac{x}{z}$

2. อัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometric Ratio)

หมายถึง อัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก



จากรูป $\triangle ABC$ เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี C เป็นมุมฉาก และ A เป็นมุมที่เราพิจารณา โดยเรียกแต่ละด้านดังนี้

$\overline{AB}$ คือ ด้านตรงข้ามมุมฉาก แทนความยาวของด้าน c

$\overline{AC}$ คือ ด้านประกอบมุมฉาก แทนความยาวของด้าน b

$\overline{BC}$ คือ ด้านประกอบมุมฉาก แทนความยาวของด้าน a

อัตราส่วนของความยาวทั้งสามของด้าน มีชื่อเรียกดังนี้

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\text{นั่นคือ } \sin A = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\text{นั่นคือ } \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$$

$$\text{นั่นคือ } \tan A = \frac{a}{b}$$

ตัวอย่าง

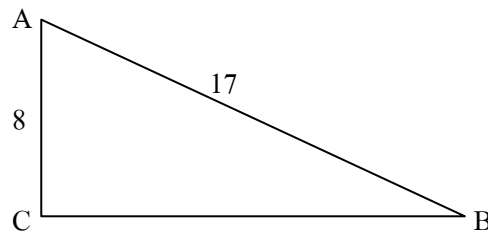
กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC มี $\hat{C}$ เป็นมุมฉาก และ $17 \sin B = 8$ จงหาค่าของ

1.) $\cos A + \sin A$

2.) $\tan A + \cos B$

3.) $\sin A + \tan B$

วิธีทำ



เนื่องจาก $17 \sin B = 8$

ดังนั้น $\sin B = \frac{8}{17}$

วาดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC จะได้ $AB^2 = AC^2 + BC^2$

ดังนั้น $BC^2 = AB^2 - AC^2 = 17^2 - 8^2$

$BC = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{225}$

$\therefore BC = 15$

1.) $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{8}{17}$

$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{15}{17}$

ดังนั้น $\cos A + \sin A = \frac{8}{17} + \frac{15}{17} = \frac{23}{17}$

2.) $\tan A = \frac{15}{8}$

$\cos B = \frac{15}{17}$

ดังนั้น $\tan A + \cos B = \frac{15}{8} + \frac{15}{17} = 15 \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{17} \right) = \frac{375}{136}$

3.) $\sin B = \frac{8}{17}$

$\tan B = \frac{8}{15}$

ดังนั้น $\sin B + \tan B = \frac{8}{17} + \frac{8}{15} = 8 \left(\frac{1}{17} + \frac{1}{15} \right) = \frac{256}{255}$

ตอบ

อัตราส่วนตรีโกณมิติ (Trigonometric Ratio) อีก 3 อัตราส่วน ซึ่งกำหนดด้วยบทนิยาม ดังนี้

1. เซแคนต์ของมุม A เขียนว่า secant A เขียนย่อ sec A คือส่วนกลับของ cos A

$$\text{นั่นคือ} \quad \sec A = \frac{1}{\cos A} \quad \text{เมื่อ } \cos A \neq 0$$

2. โคเซแคนต์ของมุม A เขียนว่า cosecant A เขียนย่อ cosec A คือส่วนกลับของ sin A

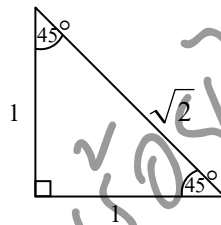
$$\text{นั่นคือ} \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} \quad \text{เมื่อ } \sin A \neq 0$$

3. โคแทนเจนต์ของมุม A เขียนว่า cotangent A เขียนย่อ cot A คือส่วนกลับของ tan A

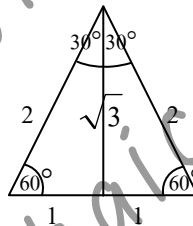
$$\text{นั่นคือ} \quad \cot A = \frac{1}{\tan A} \quad \text{เมื่อ } \tan A \neq 0$$

3. อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 45° หาได้จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่ว ซึ่งด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 1 หน่วย และมุมที่ฐานกางมุมละ 45°



อัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° และ 60° หาได้จากรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า ยาวด้านละ 2 หน่วย แล้วลากเส้นแบ่งครึ่งมุมยอดมาตั้งฉากและแบ่งครึ่งฐาน



สรุปค่าอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60° ได้ดังตารางต่อไปนี้

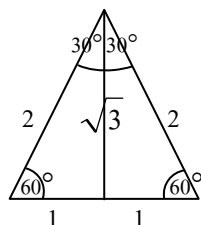
ตารางแสดงอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุม 30° , 45° และ 60°

อัตราส่วน \ มุม	30°	45°	60°
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tan	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
cosec	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
sec	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2
cot	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

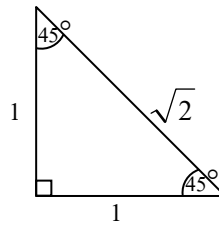
สำหรับมุมทุกมุมที่มีขนาดระหว่าง 0° และ 90° ($0^\circ < A < 90^\circ$) สามารถหาค่าของ $\sin\theta$, $\cos\theta$ และ $\tan\theta$ จากตารางต่อไปนี้

อัตราส่วน	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\sec\theta$	$\cot\theta$
มุม 0°	0	1	0	—	1	—
มุม 90°	1	0	—	1	—	—

— หมายถึง หาค่าไม่ได้



อัตราส่วนตรีโกณมิติของ มุม 30 และ 60 องศา



อัตราส่วนตรีโกณมิติของ มุม 45 องศา

ตัวอย่าง

จงหาค่าของจำนวนที่กำหนดให้ต่อไปนี้

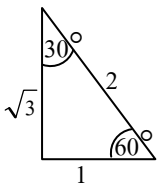
1.) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$

4.) $(\sin 45^\circ)(\cos 45^\circ) - (\sin 30^\circ)(\cos 60^\circ)$

2.) $\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} + \tan 45^\circ$

5.) $(\tan 60^\circ)^2 (\tan 30^\circ)^2$

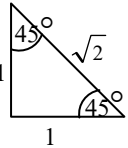
3.) $3(\tan 30^\circ + (\sin 45^\circ)^2)$



$\sin 30^\circ = \frac{1}{2};$
 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$
 $\sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}};$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$
 $\cos 60^\circ = \frac{1}{2};$
 $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}};$

$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1}$
 $\tan 45^\circ = 1$



เราทราบค่าตรีโกณมิติหมดทุกข้อแล้ว มาเริ่มทำแบบฝึกหัดกันได้เลยครับ.

1.) $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ$

วิธีทำ $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

2.) $\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} + \tan 45^\circ$

วิธีทำ $\frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} + \tan 45^\circ = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \div \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + 1 = 1 + 1 = 2$

$$3.) \ 3(\tan 30^\circ + (\sin 45^\circ)^2)$$

$$\begin{aligned} \text{วิธีทำ} \quad 3(\tan 30^\circ + (\sin 45^\circ)^2) &= 3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \quad \text{โดยที่ } \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{1} + \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3} + 1}{2} \end{aligned}$$

$$4.) \ (\sin 45^\circ)(\cos 45^\circ) - (\sin 30^\circ)(\cos 60^\circ)$$

$$\text{วิธีทำ} \quad (\sin 45^\circ)(\cos 45^\circ) - (\sin 30^\circ)(\cos 60^\circ) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$5.) \ (\tan 60^\circ)^2 (\tan 30^\circ)^2$$

$$\text{วิธีทำ} \quad (\tan 60^\circ)^2 (\tan 30^\circ)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{3}{1} - \frac{1}{3} = \frac{9-1}{3} = \frac{8}{3} \quad \text{ตอบ}$$

ความสัมพันธ์ของอัตราส่วนตรีโกณมิติ

$$\sin A \cdot \operatorname{cosec} A = 1$$

$$\cos A \cdot \sec A = 1$$

$$\tan A \cdot \cot A = 1$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

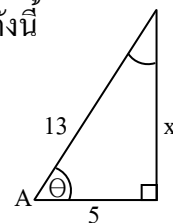
$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$$

ตัวอย่าง กำหนด $13 \cos A = 5$ จงหาค่า $\sin A$ และ $\cot A$

วิธีทำ จาก $13 \cos A = 5$ จะได้ $\cos A = \frac{5}{13}$ แล้วลองวาดรูป จะได้รูปดังนี้



จากทฤษฎีบทของพีทาโกรัส; $13^2 = x^2 + 5^2$

$$x^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

$$x = \sqrt{144} = 12 \text{ หน่วย}$$

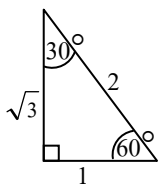
$$\text{ดังนั้น} \quad \sin A = \frac{12}{13}$$

$$\text{และ} \quad \cot A = \frac{1}{\tan A} = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5}$$

ตอบ

ตัวอย่าง จงหาค่า x จากสมการ $x \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{3}{4}$

วิธีทำ จากรูป $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$



โจทย์กำหนดให้

$$x \sin 60^\circ \cos 30^\circ = \frac{3}{4}$$

$$x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{3}{4}$$

$$x \left(\frac{3}{4} \right) = \frac{3}{4}$$

$$\text{ดังนั้น } x = \frac{3}{4} \times \frac{4}{3} = 1$$

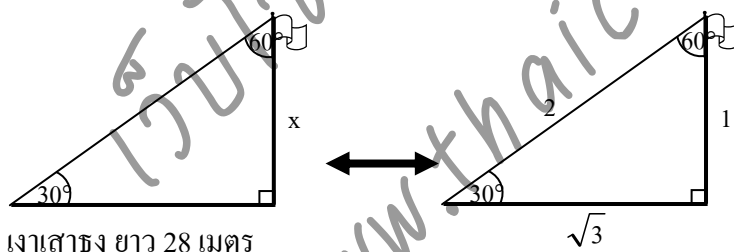
$$\text{จะได้ } x = 1$$

ตอบ

4. การนำไปใช้

ตัวอย่าง เสาต้นหนึ่งทอดเงายาว 28 เมตร แนวของเส้นตรงที่ลากผ่านจุดปลายของเงาเสา และยอดเสาทำมุม 30° กับเงาของเสานี้ จงหาความสูงของเสานี้

วิธีทำ เขียนรูปเพื่อให้เข้าใจง่าย ๆ ได้ดังนี้



เงาเสา ยาว 28 เมตร

กำหนดให้เสาสูง x เมตร

จากอัตราส่วนตรีโกณมิติเทียบความยาว 2 ด้านที่เราทราบ และต้องการหา ตามลำดับ

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\text{ความสูงเสาหรือ } x}{\text{เงาเสาหรือ 28 เมตร}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{28}$$

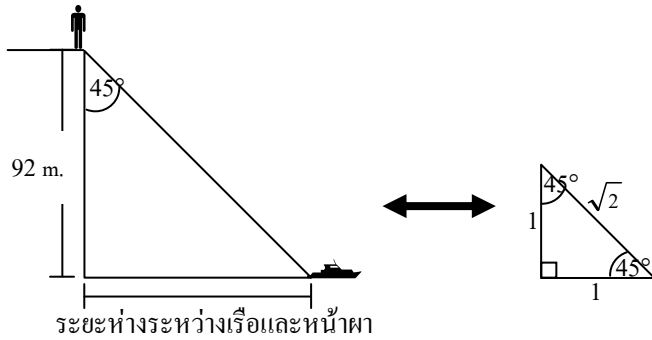
$$\text{จะได้ } x = \frac{28}{\sqrt{3}}$$

$$\text{ดังนั้น เสาสูง } \frac{28}{\sqrt{3}} \text{ เมตร}$$

ตอบ

ตัวอย่าง ชายคนหนึ่งอยู่บนหน้าผาริมทะเล ซึ่งสูงจากระดับน้ำทะเลอยู่ 92 เมตร เขามองเห็นเรือลำหนึ่งเป็นมุมก้ม 45° จงหาว่าเรืออยู่ห่างจากยอดหน้าผากี่เมตร

วิธีทำ



สมมติให้เรืออยู่ห่างจากหน้าผา x เมตร

$$\text{จากอัตราส่วนตรีโกณมิติ } \tan 45^\circ = \frac{\text{ระยะห่างระหว่างเรือกับหน้าผา}}{\text{ความสูงของหน้าผา}} = \tan 45^\circ = \frac{1}{1}$$

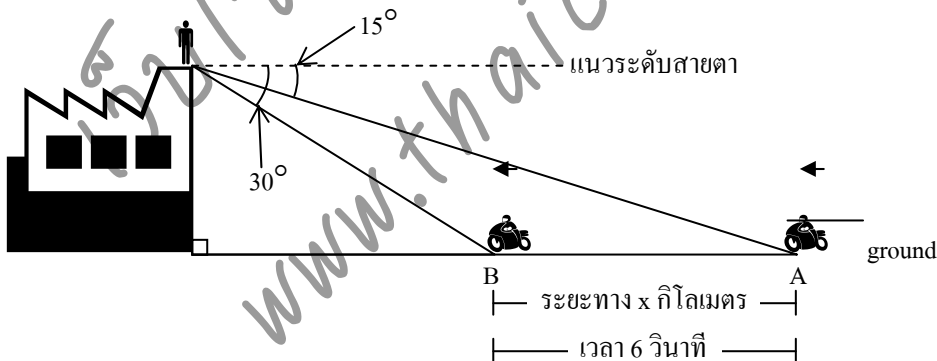
$$\frac{x}{92} = 1$$

ดังนั้น เรืออยู่ห่างจากหน้าผาเป็นระยะ 92 เมตร

ตอบ

ตัวอย่าง นตท.รักสงบ ขึ้นอยู่บนตึกหลังหนึ่ง เมื่อมองลงไปยังถนนหน้าตึก เห็นรถมอเตอร์ไซด์คันหนึ่งแล่นช้า ๆ ขณะที่รถแล่นถึงจุด A มีมุมก้ม 15° อีก 6 วินาที แล่นถึงจุด B มีมุมก้ม 30° ถ้ารถมอเตอร์ไซด์แล่นไปได้ชั่วโมงละ 60 กิโลเมตร จงหาว่า 1.) A และ B ห่างกันกี่เมตร 2.) ตึกนี้สูงกี่เมตร

วิธีทำ



ตอบ

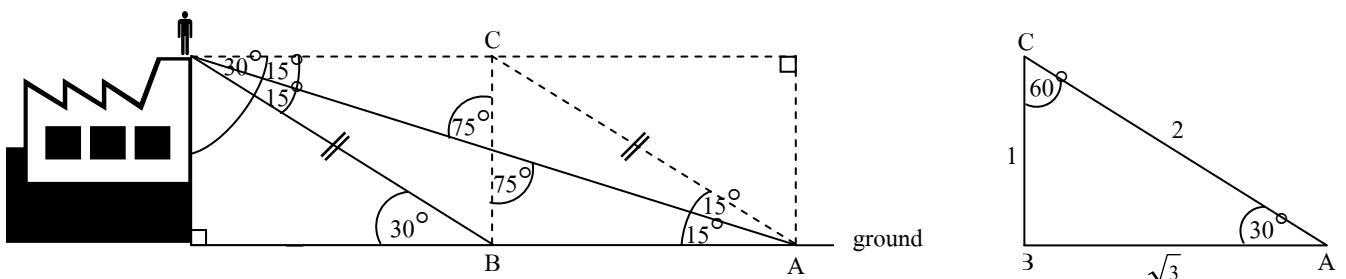
พิจารณาความเร็วของรถ คือ 60 กม. / ชม.

หมายความว่า ใน 1 ชม. หรือ 3,600 วินาที แล่นได้ระยะทาง 60 กม.

$$\text{ถ้ารถวิ่ง 6 วินาที แล่นได้ระยะทาง } \frac{6 \times 60}{3,600} = \frac{1}{10} \text{ กม. หรือ 100 เมตร}$$

ดังนั้น A และ B ห่างกัน 0.1 กิโลเมตร หรือ 100 เมตร

พิจารณารูปต่อไปนี้



$$\text{จากอัตราส่วนตรีโกณมิติ } \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\overline{CB} \text{ ซึ่งเท่ากับ ความสูงของตึก}}{\overline{AB} = 100 \text{ m.}}$$

$$\text{ดังนั้น ความสูงของตึก} = \frac{100}{\sqrt{3}} \text{ m.}$$

จะได้ว่าตึกที่ นตท.รักสงบ จะโงกหน้ามาดูรวิ้ง มีความสูง $\frac{100}{\sqrt{3}}$ เมตร

ตอบ

ตัวอย่างแบบฝึกหัด เรื่องอัตราส่วนตรีโกณมิติ

$$1. \text{ จงหาค่า } x \text{ จากสมการ } \tan 45^\circ - \cos^2 60^\circ = x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan 60^\circ \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad \text{ตอบ}$$

$$2. \text{ จงหาค่า } x \text{ จากสมการ } x \sin 30^\circ \cos^2 45^\circ = \frac{\tan^2 60^\circ \tan 45^\circ}{\sin 30^\circ \cdot \cos 60^\circ} \quad (16) \quad \text{ตอบ}$$

$$3. \text{ จงหาค่า } x \text{ จากสมการ } \operatorname{cosec}^2 30^\circ - 3x \cot^2 45^\circ = 2 \sec^2 60^\circ \quad \left(-\frac{4}{3} \right) \quad \text{ตอบ}$$

$$4. \text{ จงหาค่าของ } 8 (\cos 30^\circ)^2 - 3 (\tan 60^\circ)^2 + 4 (\sin 60^\circ)^2 \quad (0) \quad \text{ตอบ}$$

$$5. \text{ จงหาค่าของ } \frac{2 \cos 30^\circ}{\tan 60^\circ} - \frac{\sin 45^\circ \tan 45^\circ}{\cos 45^\circ} + 2 \sin 60^\circ \tan 30^\circ \quad (1) \quad \text{ตอบ}$$

6. นตท.กล้าหาญ ยืนห่างจากตึกหลังหนึ่ง 165 เมตร สังเกตเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 30° เมื่อเขาเดินไปอีกระยะหนึ่งแล้ว

สังเกตเห็นยอดตึกหลังเดิมเป็นมุมเงย 45° อยากทราบว่า เขาเดินเข้าไปอีกประมาณกี่เมตร (กำหนดให้ $\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$)

(ตอบ 96.7 หรือประมาณ 70 เมตร)

7. นตท.ศักดิ์ชาย สูง 5 ฟุต ยืนอยู่ห่างเสาโทรเลข 14 ฟุต มองดูยอดเสาโทรเลขเป็นมุมเงย 72° เสาโทรเลขสูงกี่เมตร (กำหนดให้ $\tan 72^\circ = 3.078$) (ตอบ 48.092 ฟุต หรือ 12.93 เมตร)

8. นตท.ภักดี ยืนอยู่กลางสนาม สังเกตเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 30° ถ้าเขาเดินไปหาเสาธงอีก 50 เมตร เขาสังเกตเห็นยอดเสาธงเป็นมุมเงย 45° ถ้า นตท.ภักดีสูง 160 เซนติเมตร เสาธงสูงกี่เมตร (กำหนดให้ $\sqrt{3} \approx 1.732$)

(ตอบ 69.9 เมตร หรือประมาณ 70 เมตร)

9. เสาของเสาโทรเลขต้นหนึ่ง ยาว 15 ฟุต เมื่อมุมเงยของดวงอาทิตย์เป็น 58° จงหาความยาวของเงาเสาโทรเลขต้นนี้ เมื่อมุมเงยเป็น 27° (กำหนดให้ $\tan 58^\circ = 1.6$ และ $\tan 27^\circ = 0.5$) (ตอบ 48 ฟุต)

10. เสาไฟฟ้าสองต้นสูงเท่ากัน อยู่ห่างกัน 100 ฟุต ชายคนหนึ่งยืนอยู่ ณ จุดหนึ่งระหว่างเสาไฟฟ้าสองต้นนี้บนแนวเสาต้นเดียวกันกับโคนเสาไฟฟ้าทั้งสองต้น เขามองดูยอดเสาไฟฟ้าเป็นมุมเงย 30° และ 60° จงหาว่าเขายืนอยู่ห่างจากเสาไฟฟ้าต้นแรกกี่ฟุต (ตอบ 25 ฟุต)

11. สี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่ง กว้าง 8.72 นิ้ว และยาว 14.3 นิ้ว จงหามุมที่เส้นทแยงมุมทำกับฐาน ว่ากางประมาณกี่องศา (กำหนดให้ $\tan 59^\circ = 1.64$) (ตอบ 31 องศา)

12. ถ้า x_1, x_2 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 \tan^2 45^\circ - x \cot^2 30^\circ + \sec^2 60^\circ = 0$ แล้ว x_1 และ x_2 มีค่าเท่าใด (ตอบ $x_1 = 1, x_2 = 2$)

13. ค่าของ x จากสมการ $x^2 \sin^2 45^\circ \operatorname{cosec} 30^\circ - 5x \tan^2 30^\circ \sec 60^\circ = -1$ มีค่าเท่าใด (ตอบ 3 และ $\frac{1}{3}$)

14. จงหาค่า x จากสมการ $x \sin 60^\circ \cos^2 30^\circ = \frac{\tan 60^\circ \sin 30^\circ}{\cot^2 45^\circ \sec^2 45^\circ \operatorname{cosec} 60^\circ}$ (ตอบ $\frac{1}{3}$)